

CORRECTION TD - 05

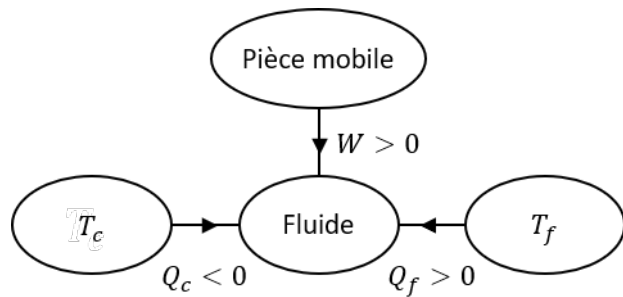
EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Cycle de Carnot réfrigérant

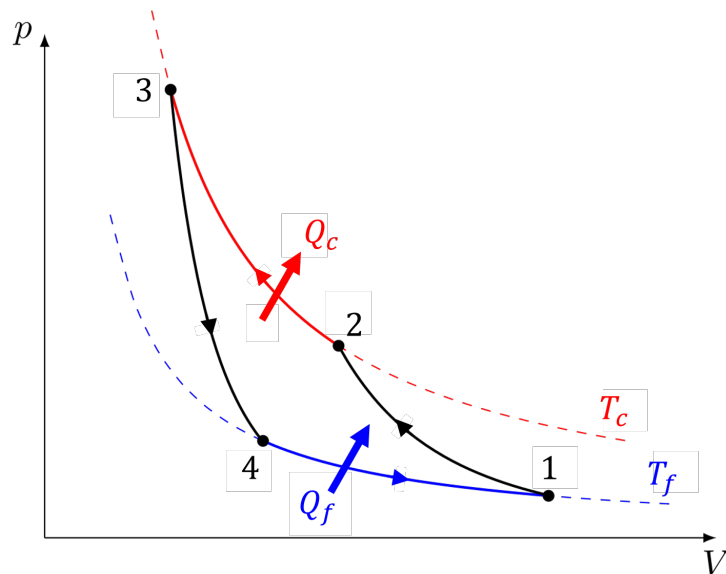
☆☆☆

1277

1) La source froide est l'intérieur du réfrigérateur et la source chaude est l'extérieur du réfrigérateur.



2)



3) On utilise la loi de Laplace entre 1 et 2 :

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = cte \Rightarrow P_1^{1-\gamma} T_f^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_c^\gamma \Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{T_f}{T_c} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 1,87 \text{ bar}$$

4) L'efficacité (de Carnot ici) est définie comme le rapport entre la grandeur d'intérêt et la grandeur coûteuse.

$$e_c = \frac{Q_f}{W} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 7,38$$

Cela signifie qu'avec 1 kJ d'électricité, on peut extraire 7,38 kJ du compartiment froid. Donc il faut du compartiment froid 136 J d'électricité pour extraire 1 kJ du compartiment froid.

5) Comme pour toute isotherme, elle doit être réalisée très lentement. Pour accélérer les échanges il est plus judicieux, par exemple après l'étape [1 → 2], d'arriver à une température $T > T_c$. Les transferts de chaleur de chaleurs seront plus rapides mais irréversibles.

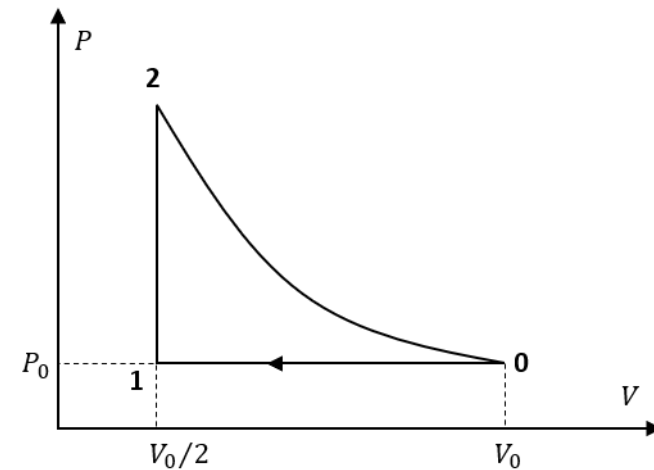
En réalité, aucune étape n'est parfaitement réversible, ce qui va diminuer l'efficacité. L'ordre de grandeur est de 3.

Ex. n°2 • Rendement d'un cycle

☆☆☆

4755

1)



2) Loi des gaz parfaits :

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{P_0 V_0}{2nR} = \boxed{\frac{T_0}{2}}$$

Loi de Laplace :

$$TV^{\gamma-1} = cte \Rightarrow T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \boxed{2^{\gamma-1} T_0}$$

3) Le cycle est parcouru dans le sens horaire, c'est donc un moteur. Son rendement est défini par :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

4) On a :

$$W_{01} = -P_0 (V_1 - V_0) = \frac{nRT_0}{2}$$

$$\Delta U_{01} = C_V (T_1 - T_0) = \frac{-1}{\gamma - 1} \times \frac{nRT_0}{2}$$

$$Q_{01} = \Delta U_{01} - W_{01} = \frac{-\gamma}{\gamma - 1} \times \frac{nRT_0}{2} < 0$$

$$W_{12} = 0$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = C_V (T_2 - T_1) = \frac{2\gamma - 1}{\gamma - 1} \times \frac{nRT_0}{2} > 0$$

$$Q_{20} = 0$$

On en déduit donc : $Q_f = Q_{12}$ et $Q_c = Q_{01}$. Ainsi,

$$\eta = 1 - \frac{\gamma}{2\gamma - 1} = 15 \%$$

5) Température de la source froide : $T_f = T_1 = T_0/2$ et température de la source chaude $T_c = T_2 = 2^{\gamma-1} T_0$. Ainsi, le rendement de Carnot vaut :

$$\eta_c = \frac{\Delta T}{T_c} = 1 - \frac{1}{2^\gamma} = 62 \%$$

1) Pour tout l'exercice, on pourra utiliser la valeur de nR suivante :

$$P_m V_M = nRT_m \Rightarrow \boxed{nR = \frac{P_m V_M}{T_m}}$$

Loi de Laplace entre 1 et 2 :

$$TV^{\gamma-1} = cte \Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{T_2 = T_m \beta^{\gamma-1} = 910 \text{ K}}$$

Équation d'état des gaz parfaits en 3 :

$$T_3 = \frac{P_M V_m}{nR} = T_m \frac{P_M}{P_m \beta} = 1034 \text{ K}$$

Loi de Laplace entre 4 et 5 :

$$TV^{\gamma-1} = cte \Rightarrow T_M V_4^{\gamma-1} = T_5 V_M^{\gamma-1} \Rightarrow T_5 = T_M \left(\frac{V_4}{V_M} \right)^{\gamma-1}$$

Équation d'état des gaz parfaits en 4 :

$$V_4 = \frac{nRT_M}{P_M} = V_M \frac{P_m T_M}{P_M T_m}$$

On en déduit :

$$T_5 = T_M \left(\frac{P_m T_M}{P_M T_m} \right)^{\gamma-1} = 882 \text{ K}$$

2) Pour l'étape 2 → 3 isochore, le premier principe + la loi de Joule donnent (en massique) :

$$\Delta u_{23} = q_{23} = \frac{R}{M(\gamma - 1)} (T_3 - T_2) = 88,9 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$$

Pour l'étape 3 → 4 isobare, le premier principe (version enthalpique) + la loi de Joule donnent (en massique) :

$$\Delta h_{34} = q_{34} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} (T_4 - T_3) = 1042 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$$

On en déduit :

$$q_c = q_{23} + q_{34} = 1131 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$$

3) Pour l'étape $5 \rightarrow 1$ isochore, le premier principe + la loi de Joule donnent (en massique) :

$$\Delta u_{51} = q_{51} = q_f = \frac{R}{M(\gamma - 1)} (T_1 - T_5) = -422 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$$

4) Si on applique le premier principe sur un cycle :

$$\Delta u = 0 = q_f + q_c + w \Rightarrow w = -q_f - q_c = -710 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$$

5) Le rendement moteur vaut :

$$\eta = -\frac{w}{q_c} = 62,7 \%$$

C'est un très bon rendement pour un moteur, assez proche de celui de Carnot :

$$\eta_c = \frac{T_M - T_m}{T_M} = 85,9 \%$$

Ex. n°4 • Chauffage d'une serre

★★★

9560

1) Il faut dans cet exercice prêter attention aux conventions de sens pour les échanges énergétiques, pas toujours orientés vers la machine thermique. On rappelle le rendement du moteur idéal et l'efficacité de la pompe à chaleur, elle aussi idéale.

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_2}{Q_c} \quad \text{et} \quad e = \frac{T_1}{T_1 - T_0} = \frac{Q_0}{W}$$

L'efficacité e_{tot} du dispositif entier est ici le rapport du transfert thermique reçu par la serre $Q_0 + Q_2$ par l'énergie dépensée Q_c :

$$e_{tot} = \frac{Q_0 + Q_2}{Q_c}$$

On constate que $\frac{Q_0}{Q_c} = \eta \times e$ et $\frac{Q_2}{Q_c} = 1 - \eta$. Ainsi :

$$e_{tot} = 1 + \eta(e - 1) = 1 + \frac{T_2 - T_1}{T_2} \times \frac{T_0}{T_1 - T_0} = \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}$$

2) Une chaudière seule dans la serre a une efficacité de 1 car toute la chaleur produite par la chaudière est transmise à la serre. Or, $e_{tot} > 1$ puisque $e > 1$.

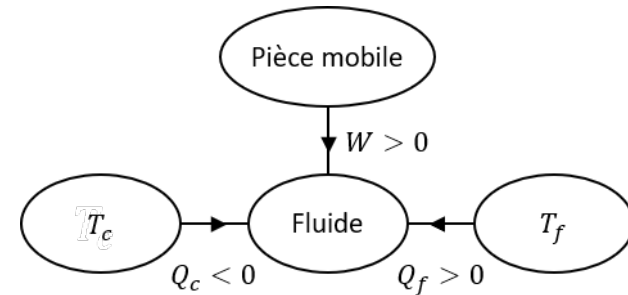
POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°5 • Pompe à chaleur

★★★

4601

1) Diagramme :



2) Son efficacité de Carnot vaut :

$$e_{max} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 14,7$$

3) On remarque que la source froide T_2 étant donnée (milieu extérieur), l'efficacité thermique maximale théorique est une fonction décroissante de la température de la source chaude T_1 . L'efficacité e_{max} est-elle la plus grande possible lorsque $T_1 = T_2$, donc quand on met en route la machine.

4) L'efficacité réelle de la PAC vaut :

$$e = \frac{-Q_c}{W} = \frac{\mathcal{P}_{th}}{\mathcal{P}_m} \quad \text{avec :} \quad \mathcal{P}_{th} = 10^8 \text{ J} \cdot \text{h}^{-1} = 28 \text{ kW}$$

On en déduit :

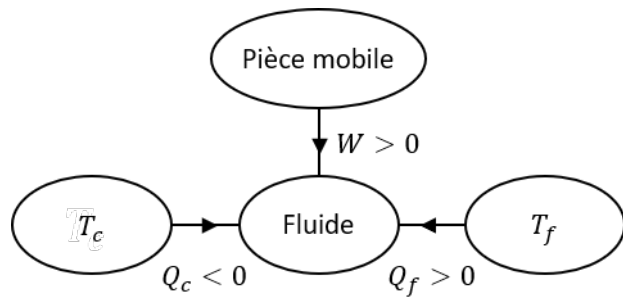
$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_{th}}{e} = 5,6 \text{ kW}$$

Ex. n°6 • Climatiseur de voiture

★★★

3147

1)



2) Le fluide de la climatisation reçoit une puissance thermique $\mathcal{P}_2 > 0$ de l'habitable, donc l'habitable cède donc une puissance thermique $-\mathcal{P}_2 < 0$ au fluide de la climatisation.

L'habitable étant maintenu à température constante, son énergie interne ne varie pas et la somme des puissances thermiques qu'il échange est donc nulle :

$$\mathcal{P}_{th} - \mathcal{P}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{th} = K(T_1 - T_2) = 2,55 \text{ kW}}$$

3) Par définition de l'efficacité :

$$e = \frac{Q_2}{W} = \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_m} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_2}{e} = \frac{850}{W}}$$

4) La puissance thermique dégagée par la combustion de $V = 7 \text{ L}$ d'essence aux 100 km sur un parcours d'une heure vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{comb}} = \frac{35 \times 10^9}{3600} \times 7 = \frac{68}{\text{kW}}$$

Le moteur de rendement η fournit alors une puissance mécanique utile $\mathcal{P}_m$ qui s'écrit :

$$\mathcal{P}_m = \eta \mathcal{P}_{\text{comb}} = \frac{6,8}{\text{kW}} \text{ pour } 7 \text{ L d'essence consommés}$$

La puissance mécanique $\mathcal{P}_c$ de la climatisation correspond donc à une surconsommation V_c aux 100 km :

$$\boxed{V_c = \frac{V \mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_m} = \frac{7 \times 850}{6,8 \times 10^3} = 0,87 \text{ L}}$$

C'est-à-dire une surconsommation de 12 % qui est loin d'être négligeable.

Ex. n°7 • Chauffage d'un bâtiment



2280

1) L'efficacité de la pompe à chaleur est définie par le rapport du transfert thermique Q_c reçu par le fluide caloporteur de la part de la source chaude (l'intérieur de la maison) par le travail W reçu par le fluide caloporteur sur un cycle.

Sur la durée $\Delta t = 1$ heure, le fluide reçoit le transfert thermique $Q_c = 5 \text{ MJ}$. Alors,

$$e = \frac{Q_c}{W} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Q_c}{e \Delta t} = 430 \text{ W}}$$

2) Les radiateurs électriques ont une efficacité de 1, donc pour assurer le même transfert de chaleur, il faudrait fournir une puissance 3,2 fois plus élevée, soit $\boxed{1,4 \text{ kW}}$.

3) 80 % de l'énergie libérée par la combustion du fuel sert à chauffer le bâtiment. L'énergie dégagée par la combustion de fuel doit donc être de $5/0,8 = 6,25 \text{ MJ}$ pour pouvoir chauffer le bâtiment durant 1 heure.

Ainsi, chaque heure, il faut brûler :

$$V = \frac{6,25 \text{ MJ}}{37 \text{ MJ} \cdot \text{L}^{-1}} = \boxed{0,17 \text{ L}}$$

4) On chauffe le bâtiment avec la pompe à chaleur précédente. L'énergie électrique nécessaire par heure est de :

$$\mathcal{E}_{\text{elec}} = \mathcal{P} \Delta t = \frac{Q_c}{e} = 1,56 \text{ MJ}$$

La combustion du fuel devra donc fournir :

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{elec}}}{0,4} = 3,9 \text{ MJ} \cdot \text{h}^{-1}$$

ce qui nécessitera la combustion de $\boxed{0,10 \text{ L}}$ de fuel par heure.

Ainsi, l'utilisation comme source de production d'énergie électrique alimentant la pompe à chaleur plutôt que d'utiliser directement l'énergie dégagée par la combustion, permet d'économiser chaque heure 0,07 L de fuel, donc chaque jour 1,68 L, soit à la fin de l'hiver (environ 5 mois, soit 150 jours), environ 250 L de fuel.

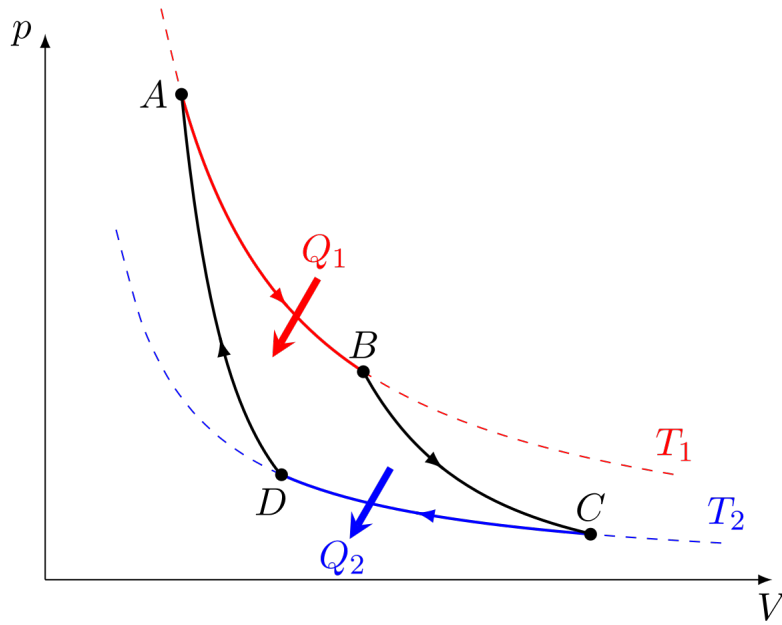
C'est intéressant... passer l'investissement de la pompe à chaleur.

Ex. n°8 • Mise en route d'une pompe à chaleur



1596

1) Un cycle de Carnot est composé de deux isothermes et deux adiabatiques réversibles.



2) Les deux principes donnent :

$$0 = Q_c + Q_f + W \quad \text{et} \quad 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$$

Seul de deuxième principe dépend du caractère réversible des évolutions ($S_c = 0$).

3) Une pompe à chaleur est un récepteur $[W > 0]$ dont l'objectif est de chauffer la source chaude $[Q_c < 0]$. Le deuxième principe assure donc que $[Q_f > 0]$: la pompe à chaleur refroidit la source froide.

Le premier principe assure alors que :

$$0 = -|Q_c| + |Q_f| + |W| \quad \Rightarrow \quad |W| = |Q_c| - |Q_f| > 0 \quad \Rightarrow \quad [Q_c] > [Q_f]$$

L'énergie fournie à la source chaude est égale à celle prélevée de la source froide + celle fournie par le compresseur.

4) L'efficacité est définie comme l'énergie utile sur l'énergie coûteuse. Avec les deux principes, il vient :

$$e_c = \frac{-Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + Q_f/Q_c} = \frac{1}{1 - T_f/T_c} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Ainsi :

$$e_c = \frac{-Q_c}{W} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

5) On a :

$$0 = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f}$$

6) Les sources échangent uniquement de la chaleur δQ avec le fluide (pas d'autres chaleurs, pas de travail). Or, avec les notations précédentes, δQ représente la chaleur reçue par le fluide. Mais pour appliquer le premier principe sur une source, il faut indiquer la chaleur reçue par la source, égale à l'opposée de la chaleur cédée par la source (au fluide), donc $-\delta Q$. On en déduit (premier principe + loi de Joule) :

$$dU_f = mc dT_f = -\delta Q_f \quad \text{et} \quad dU_c = mc dT_c = -\delta Q_c$$

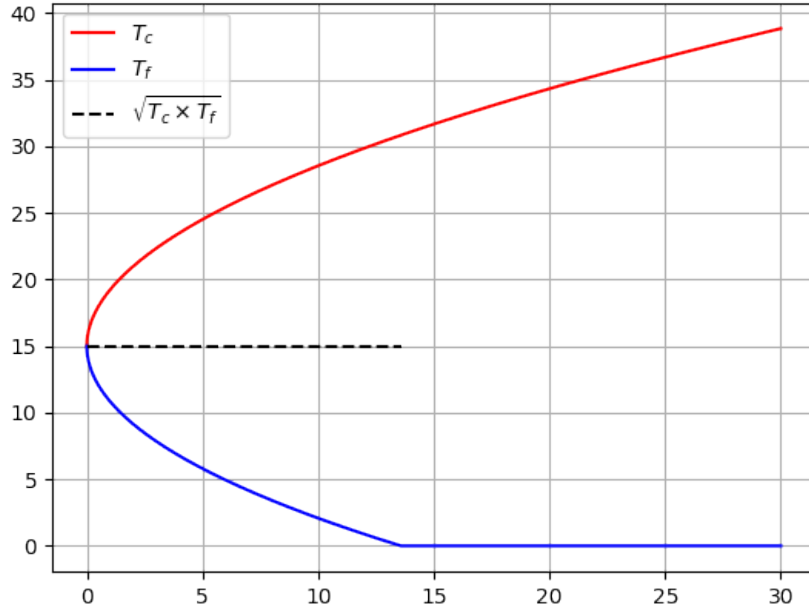
On combine avec la question précédente :

$$\frac{\delta Q_f}{T_f} + \frac{\delta Q_c}{T_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = 0$$

7) La relation précédente assure que :

$$\frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(2 \ln\left(\sqrt{T_f T_c}\right)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{T_f T_c} = cte = T_0$$

On en déduit :



Lorsque $T_f = 0$, la chaleur prélevée à la source froide ne sert plus à refroidir la source mais à la solidifier. La température reste constante tant que l'intégralité de l'eau n'est pas solidifier.

8) Comme précédemment :

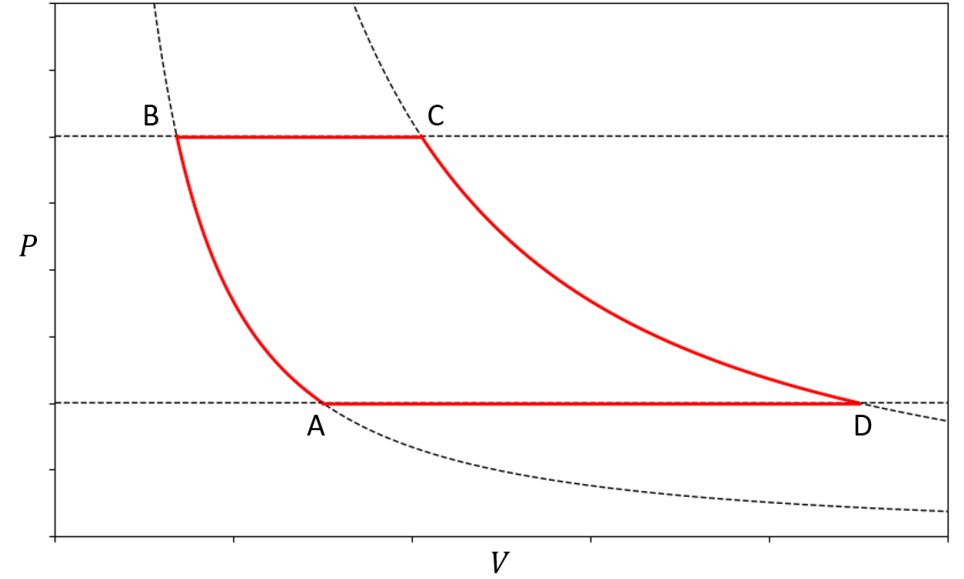
$$\eta = \frac{-\delta Q_c}{\delta W} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{T_c^2}{T_c^2 - T_0^2}$$

POUR S'ENTRAÎNER AU DS

Ex. n°9 • Turbine

☆☆☆ 8936

1)



2) Rotation horaire donc cycle moteur ($W < 0$).

3) $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$: isentropique quasi-statique, ie. adiabatique réversible, donc :

$$Q_{AB} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{CD} = 0$$

$B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$: isobare, donc on peut appliquer le premier principe version enthalpique :

$$Q_{BC} = C_P (T_C - T_B) > 0 \quad \text{et} \quad Q_{DA} = C_P (T_A - T_D) < 0$$

Lors de l'étape de combustion $B \rightarrow C$, le gaz reçoit de la chaleur, on a donc bien $Q_{BC} > 0$. Lors de l'étape de refroidissement $D \rightarrow A$, le gaz perd de la chaleur, on a donc bien $Q_{DA} < 0$.

4) Le rendement d'un moteur est défini par :

$$\eta = -\frac{W}{Q_C} = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

On utilise la loi de Laplace (relation $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$ pour pouvoir introduire α) sur AB et sur CD.

$$\begin{cases} P_2^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_B^\gamma \Rightarrow T_A = T_B \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ P_2^{1-\gamma} T_D^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_C^\gamma \Rightarrow T_D = T_C \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\eta = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Ex. n°10 • Machine frigorifique tritherme



7331

1) Étant donné qu'il n'y a aucun travail mécanique, le flux thermique de la source chaude doit nécessairement aller dans le sens « naturel » des échanges thermiques, donc vers les sources plus froides. Donc $Q_c > 0$.

Pour être un réfrigérateur, le fluide doit prélever du froid à la source froide. Donc $Q_f > 0$.

Finalement, le premier principe appliqué au fluide sur un cycle donne :

$$\Delta H = 0 = Q_c + Q_f + Q_a \Rightarrow Q_a = -(Q_c + Q_f) < 0$$

2) Toujours d'après le premier principe :

$$0 = |Q_c| + |Q_f| - |Q_a| \Rightarrow |Q_f| = |Q_a| - |Q_c| > 0 \Rightarrow |Q_a| > |Q_c|$$

Le résultat est logique puisque la source tiède « reçoit » (via le fluide caloporteur) deux transferts thermiques : celui de la source froide et celui de la source chaude.

3) Le coefficient de performance est le rapport de la grandeur utile (ici le transfert thermique prélevé par le fluide à la source froide, soit Q_f) et de la grandeur coûteuse (ici le transfert thermique donné au fluide par la source chaude, soit Q_c).

$$e = \frac{Q_f}{Q_c}$$

4) Le second principe appliqué au fluide sur un cycle réversible (machine de Carnot) donne :

$$\begin{aligned} \Delta S = 0 &= \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_a}{T_a} \Rightarrow 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c + Q_f}{T_a} \\ &\Rightarrow 0 = Q_c \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_a} \right) + Q_f \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_a} \right) \\ &\Rightarrow e_c = \frac{Q_f}{Q_c} = \frac{1/T_a - 1/T_c}{1/T_f - 1/T_a} \end{aligned}$$

5) Si $T_c \rightarrow \infty$, alors :

$$e_c \rightarrow \frac{1/T_a}{1/T_f - 1/T_a} = \frac{T_f}{T_a - T_f}$$

On retrouve là l'efficacité de Carnot d'une machine frigorifique ditherme dont la source froide est l'intérieur du réfrigérateur et la source chaude l'air ambiant.

6) Elle ne nécessite pas de compresseur (alimenté par un moteur), ce qui a pu être utile à une époque où les moteurs électriques étaient inexistantes et les machines à vapeur encore peu perfectionnées.

Ex. n°11 • Étude du régénérateur du moteur de Stirling



8883

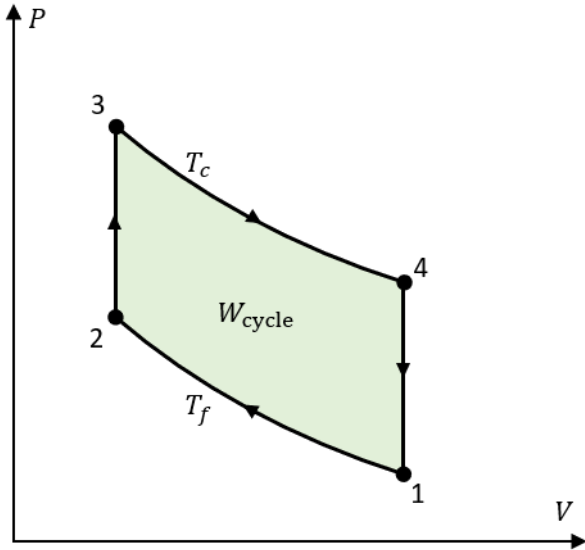
1) Nombre de moles :

$$n = \frac{m}{M} = 5,00 \text{ mol}$$

Pressions (à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits) :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{nRT_f}{V_M} = 65,1 \text{ bar} & P_2 &= \frac{nRT_f}{V_m} = 130 \text{ bar} \\ P_3 &= \frac{nRT_c}{V_m} = 488 \text{ bar} & P_4 &= \frac{nRT_c}{V_M} = 244 \text{ bar} \end{aligned}$$

2)



3) Lors d'une transformation isotherme d'un gaz parfait : $\Delta U_{ab} = 0$. Le travail des forces de pressions vaut :

$$\delta W = -P_{ext} dV = -nRT \frac{dV}{V} \Rightarrow W_{ab} = -nRT \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$$

Le premier principe donne :

$$Q_{ab} = -W_{ab} = nRT \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$$

4) Lors d'une transformation isochore d'un gaz parfait : $W_{cd} = 0$. Le premier principe donne donc :

$$\Delta U_{cd} = Q_{cd} = \frac{5nR}{2} (T_d - T_c)$$

5) On a :

$W_{12} = -nRT_f \ln\left(\frac{V_m}{V_M}\right) = 9,02 \text{ kJ}$	$Q_{12} = -W_{12} = -9,02 \text{ kJ}$
$W_{23} = 0$	$Q_{23} = \frac{5nR}{2} (T_c - T_f) = 89,4 \text{ kJ}$
$W_{34} = -nRT_c \ln\left(\frac{V_M}{V_m}\right) = -33,8 \text{ kJ}$	$Q_{34} = -W_{34} = 33,8 \text{ kJ}$
$W_{41} = 0$	$Q_{41} = \frac{5nR}{2} (T_f - T_c) = -89,4 \text{ kJ}$

6) Le travail du cycle vaut :

$$W_{\text{cycle}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = -24,8 \text{ kJ} < 0$$

W_{cycle} est le travail algébriquement reçu par le moteur. Puisque $W_{\text{cycle}} < 0$, alors le moteur fournit de l'énergie. Graphiquement, il s'agit de l'aire du cycle.

7) La source chaude est à l'origine des transferts thermiques pendant le chauffage (23) puis le maintien isotherme (34) donc :

$$Q_c = Q_{23} + Q_{34} = 123 \text{ kJ}$$

La source chaude est à l'origine des transferts thermiques pendant le refroidissement (41) puis le maintien isotherme (12) donc :

$$Q_f = Q_{41} + Q_{12} = -98,4 \text{ kJ}$$

8) On a :

$$\eta_{sr} = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_c} = 20,1 \%$$

9) Le régénérateur permet de stocker temporairement l'énergie thermique perdue lors de l'étape (41) (au lieu de la donner à la source froide) et de la redonner au gaz lors de l'étape (23) (au lieu de la prélever de la source chaude). Ainsi, la source chaude ne doit fournir que l'énergie $Q_c = Q_{34}$. Le rendement devient :

$$\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{34}} = 73,3 \%$$

On remarque que :

$$\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{34}} = 1 + \frac{Q_{12}}{Q_{34}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \eta_c$$

Avec un régénérateur idéal, le rendement devient égal au rendement de Carnot, c'est-à-dire au rendement maximal théorique du moteur.

10) C'est l'hypothèse habituelle qui distingue la rapidité des équilibres mécaniques et la lenteur des équilibres thermiques.

11) Calculons la quantité de matière totale dans le régénérateur n_r .

$$n_r = \langle n(x) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L n(x) dx = \frac{P_r V_r}{RL} \int_0^L \frac{dx}{T(x)}$$

Or, d'après l'énoncé,

$$T(x) = T_c + \frac{T_f - T_c}{L} x \Rightarrow dT = \frac{T_f - T_c}{L} dx$$

On en déduit :

$$n_r = \frac{P_r V_r}{R(T_f - T_c)} \int_{T_c}^{T_f} \frac{dT}{T} = \frac{P_r V_r}{R(T_f - T_c)} \ln\left(\frac{T_f}{T_c}\right)$$

Finalement,

$$P_r V_r = n_r R T_r \Rightarrow \boxed{T_r = \frac{T_c - T_f}{\ln(T_c/T_f)}}$$

12) La quantité de matière totale n est la somme des quantités présentes dans les trois compartiments. Ainsi, $n = n_c + n_r + n_f$. De plus, la pression est identique dans toutes les chambres.

$$n = \frac{P}{R} \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f} \right) \Rightarrow \boxed{P = \frac{nR}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f}}}$$

13) Lors de la compression (12), la pression P augmente, à T_c et T_f (et donc T_r) constants. Ce sont les volumes des trois compartiments qui varient. Le volume V_c reste nul, V_r est constant (toujours) et le volume V_f passe de V_M à V_m . Ainsi,

$$\begin{aligned} W'_{12} &= - \int_1^2 P dV = - \int_{V_M}^{V_m} \frac{nR}{V_r/T_r + V_f/T_f} dV_f \\ &= -nRT_f \int_{V_M}^{V_m} \frac{dV_f}{V_f + T_f V_r/T_c} = -nRT_f \left[\ln(V_f + T_f V_r/T_c) \right]_{V_M}^{V_m} \\ &= \boxed{-nRT_f \ln\left(\frac{V_m + T_f V_r/T_c}{V_M + T_f V_r/T_c}\right) = 8,43 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

Même raisonnement. Lors de la détente (34), la pression P diminue, à T_c et T_f (et donc T_r) constants. Ce sont donc les volumes des trois compartiments qui varient. Le volume V_f reste nul, V_r est constant (toujours) et le volume V_c passe de V_m à V_M . Ainsi,

$$\begin{aligned} W'_{34} &= - \int_3^4 P dV = - \int_{V_m}^{V_M} \frac{nR}{V_c/T_c + V_r/T_r} dV_c \\ &= -nRT_c \int_{V_m}^{V_M} \frac{dV_c}{V_c + T_c V_r/T_r} = -nRT_c \left[\ln(V_c + T_c V_r/T_r) \right]_{V_m}^{V_M} \\ &= \boxed{-nRT_c \ln\left(\frac{V_M + T_c V_r/T_r}{V_m + T_c V_r/T_r}\right) = -26,9 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve bien les expressions de W_{12} et W_{34} obtenues précédemment lorsque $\overline{V_r} = 0$.

14) On a :

$$|W'_{\text{cycle}}| = 18,4 \text{ kJ} < |W_{\text{cycle}}| = 24,8 \text{ kJ}$$

La compression ne modifie jamais le volume mort donc les volumes accessibles aux variations (dans $\delta W = -P dV$) sont plus faibles et l'aire totale du cycle est moins importante : il était logique que le travail fourni soit moindre que dans le cas idéal.